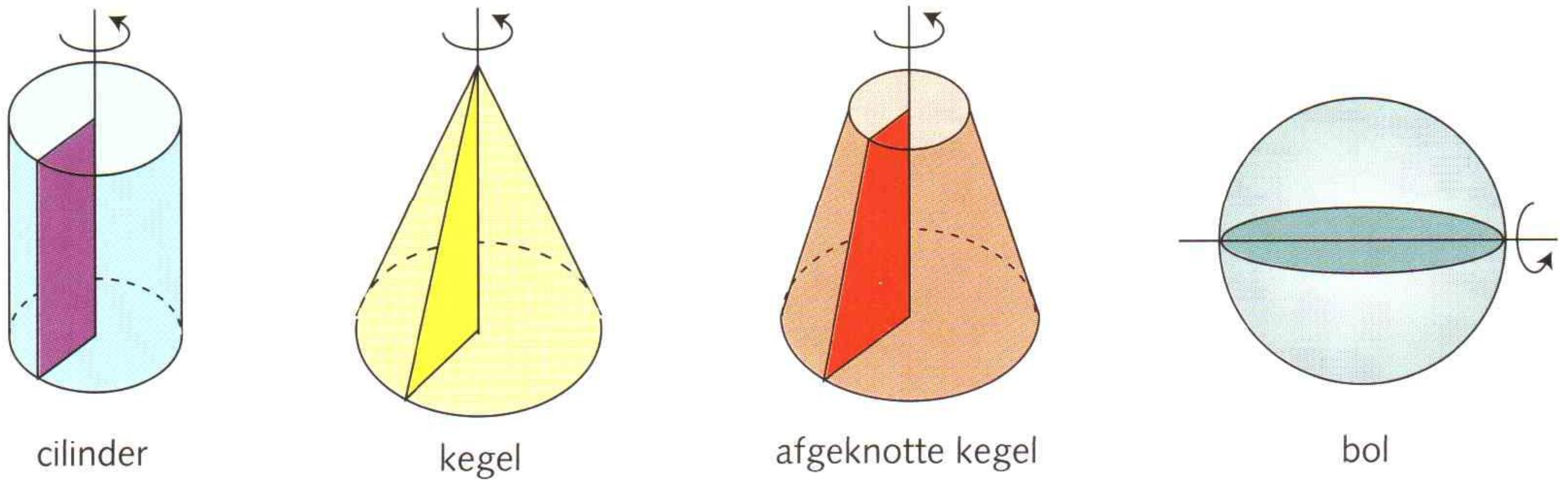
Inhoud van een omwentelingslichaam

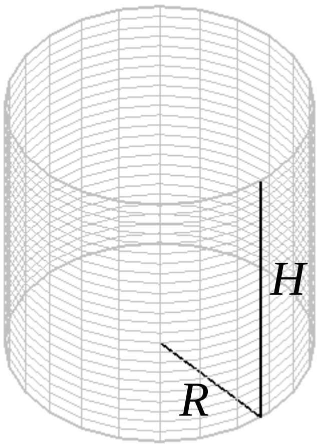
Wat is een omwentelingslichaam?

Omwentelingslichamen ontstaan door het wentelen van een vlakdeel rond een rechte: de *omwentelingsas*



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

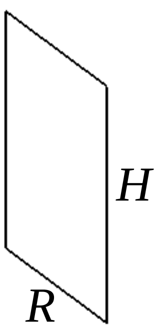
Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

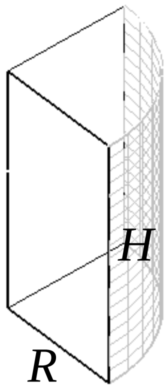
Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

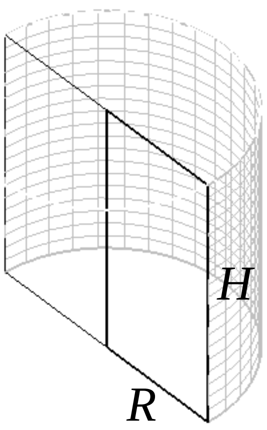
Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

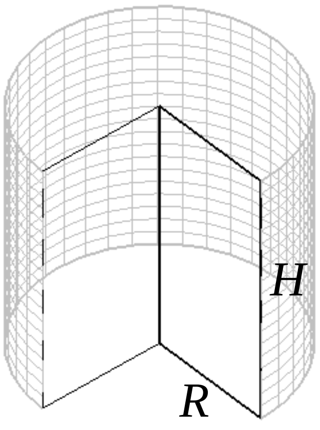
Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

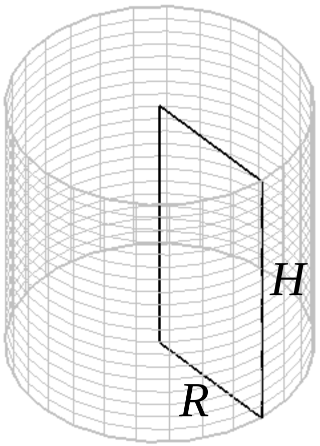
Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

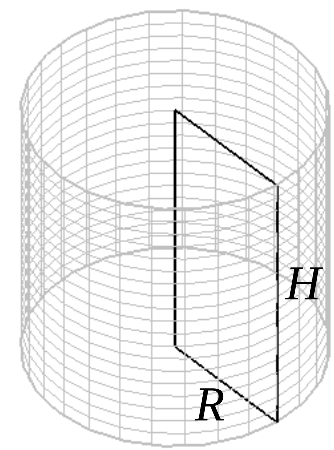
Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.



<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.

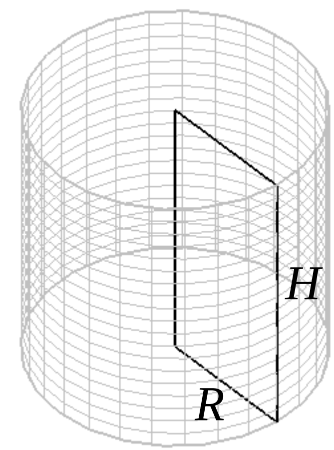


Volume: …

<u>Voorbeeld:</u> volume van een (omwentelings)cilinder

Beschouw de (omwentelings)cilinder met R als straal van grond- en bovenvlak en H als hoogte.

Deze ruimtefiguur ontstaat door omwenteling van een rechthoek met afmetingen R en H om een zijde met lengte H.



Volume: $V = \pi . R^2 . H$

ALGEMEEN

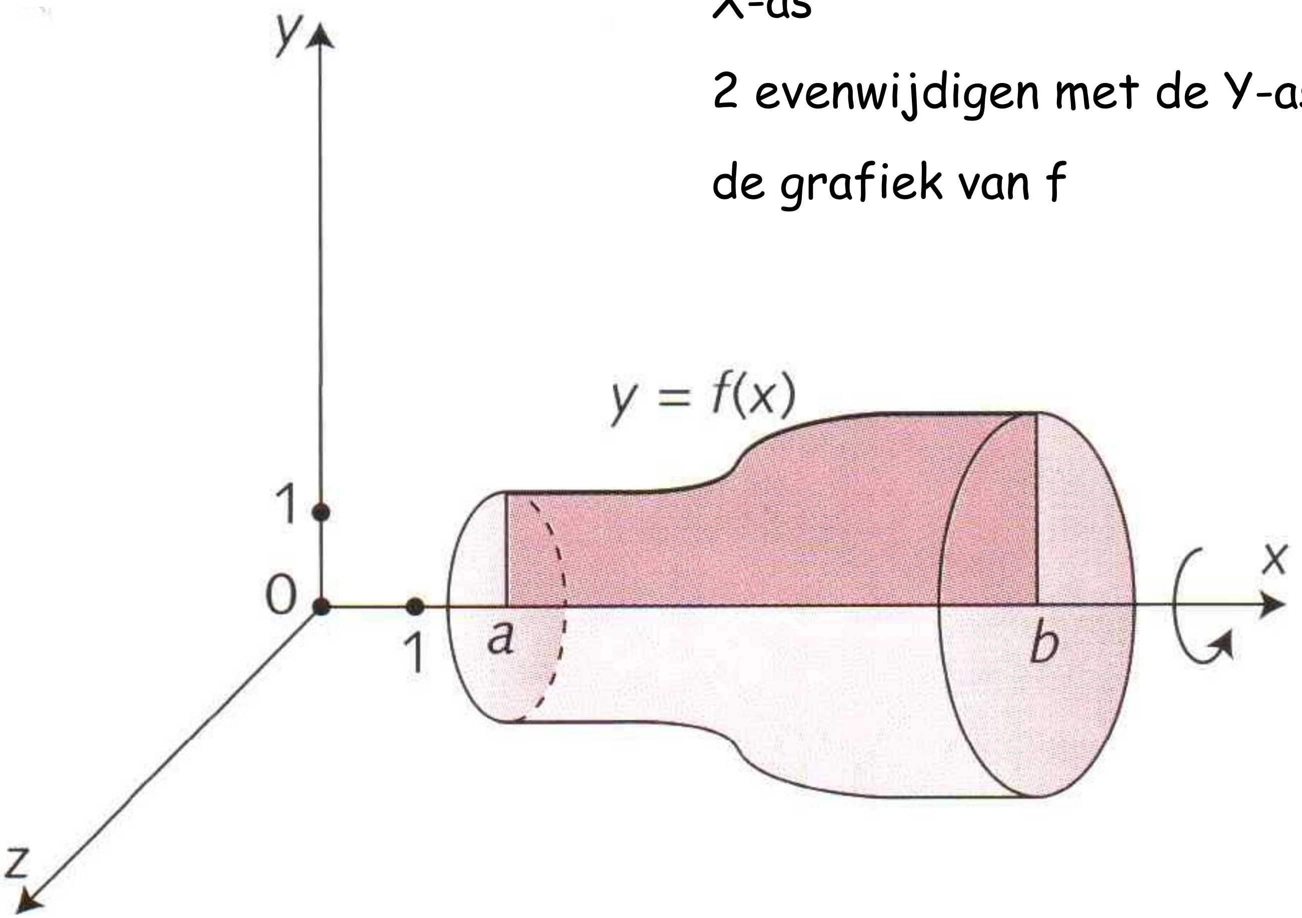
Neem een georthonormeerd assenkruis. Omwentelingsas = X-as

Vlakdeel = begrensd door:

X-as

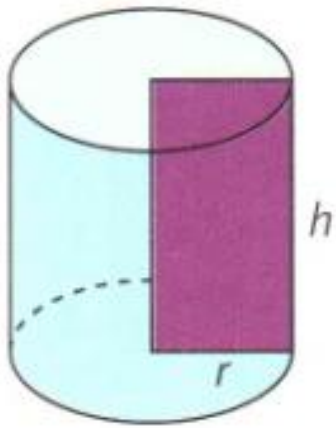
2 evenwijdigen met de Y-as

de grafiek van f



Oppervlakte vlakke figuur: benadering met rechthoekjes

Inhoud ruimtefiguur: benadering met cilindertjes



Inhoud van een cilinder:

V=oppervlakte grondvlak.hoogte

$= \pi r^2 h$

Inhoud van een RUIMTEFIGUUR:

Benaderen door de inhoud van alle cilinderdeeltjes op te tellen

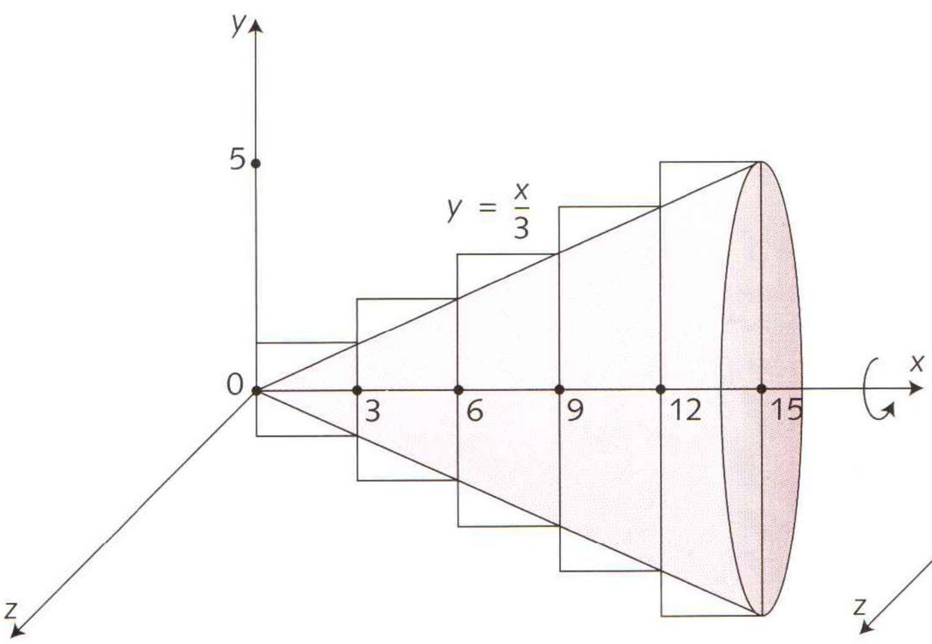
Voorbeeld: kegel

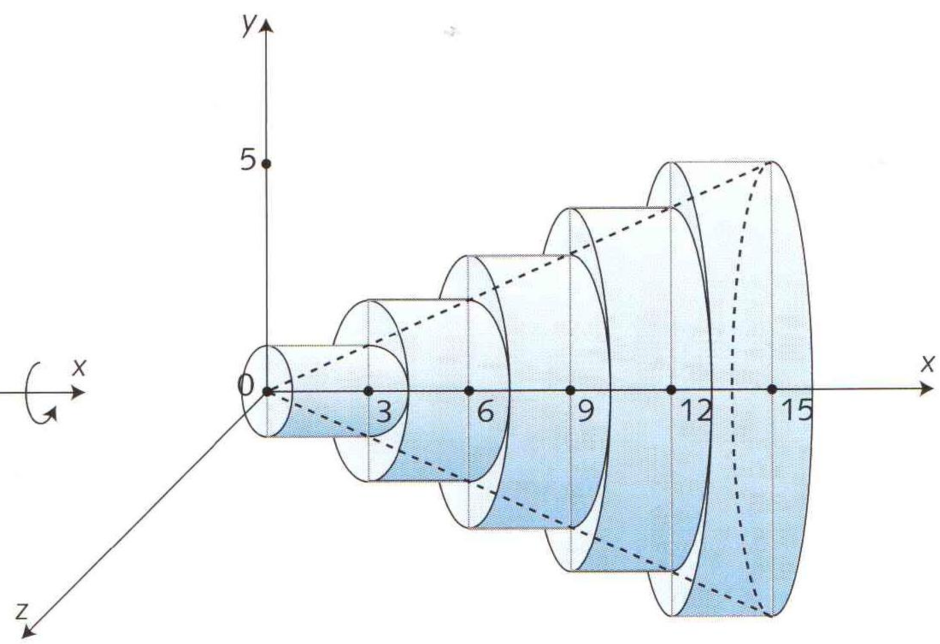
= een omwentelingslichaam door het wentelen rond de X-as

van het vlakdeel begrensd door :

de X-as, de Y-as, de rechte x = 15

en de grafiek van de functie $f: x \to \dfrac{x}{3}$





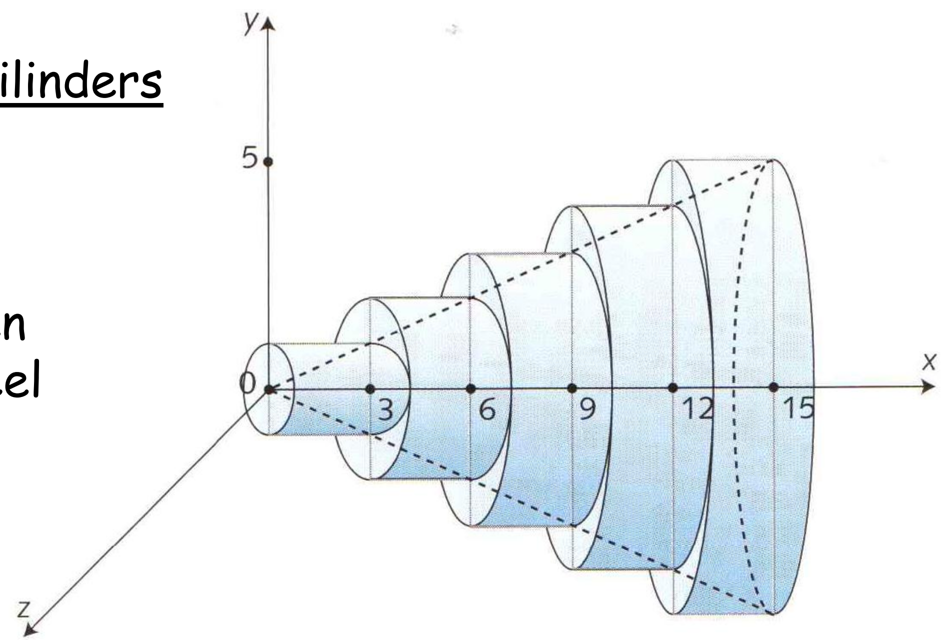
Inhoudsberekening van de kegel (h=15 en r=5)

De kegel wordt benaderd door 5 cilinders

De som van de 5 inhouden is een benadering te groot.

Onder- en bovensommen benaderen dezelfde waarde als je oneindig veel cilinders gebruikt.

(hoogte elke cilinder $\rightarrow$ 0)

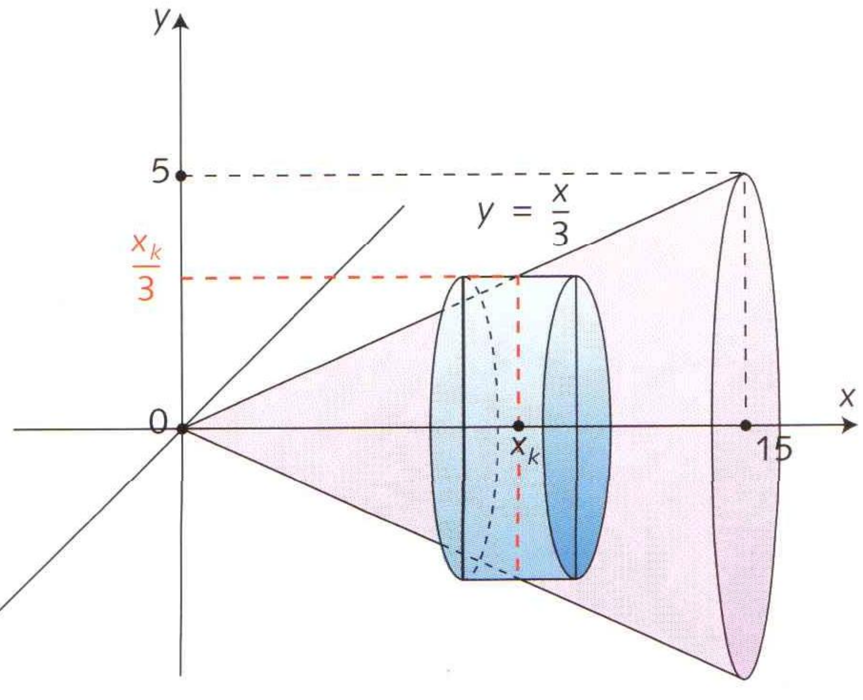


n even hoge cilinders met hoogte $\frac{15}{n}$

$$\left(\Delta x = \frac{15}{n}\right)$$

De inhoud van cilinder k = $\pi.\left(\frac{x_k}{3}\right)^2.\Delta x$

(x_k is een willekeurige x-waarde in het k-de deelinterval)



De som van de inhouden van alle deelcilinders:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \pi.\left(\frac{x_k}{3}\right)^2.\Delta x$$

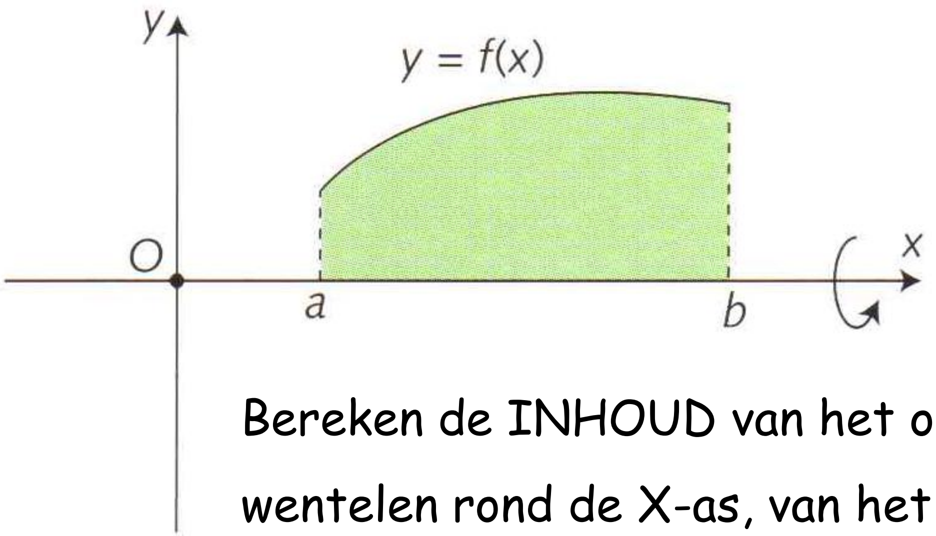
$\text{Als } \Delta x \to 0 \ \ (\text{of } n \to +\infty)$: betere benadering van de inhoud

De gevraagde inhoud : $V = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi.\left(\frac{x_k}{3}\right)^2.\frac{15}{n}$

De Riemann-som benadert zo een integraal:

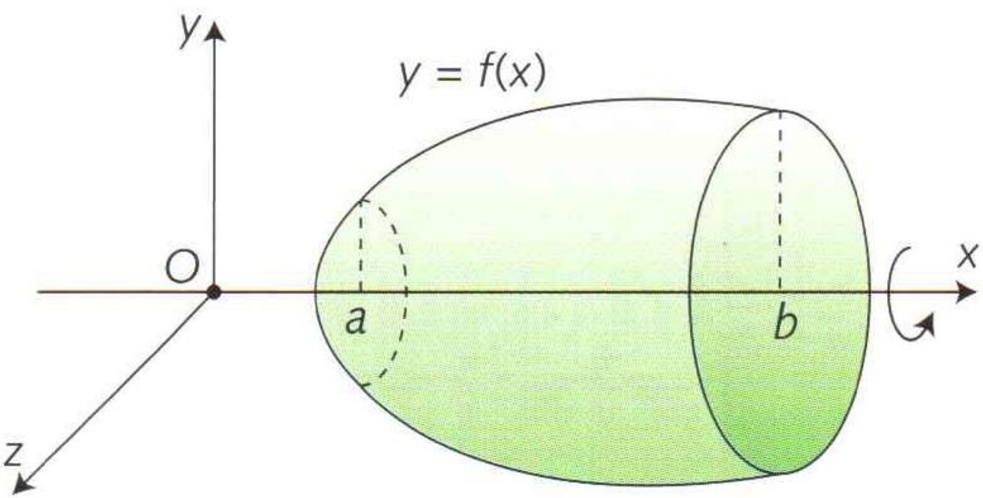
$$V = \int_0^{15} \pi.\frac{x^2}{9}dx = \frac{\pi}{9}.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{15} = 125\pi$$

Veralgemening:



f is een continue functie in [a,b]

Bereken de INHOUD van het omwentelingslichaam door het wentelen rond de X-as, van het VLAKDEEL begrensd door :
de X-as, de grafiek van f en de rechten x = a en x =b.

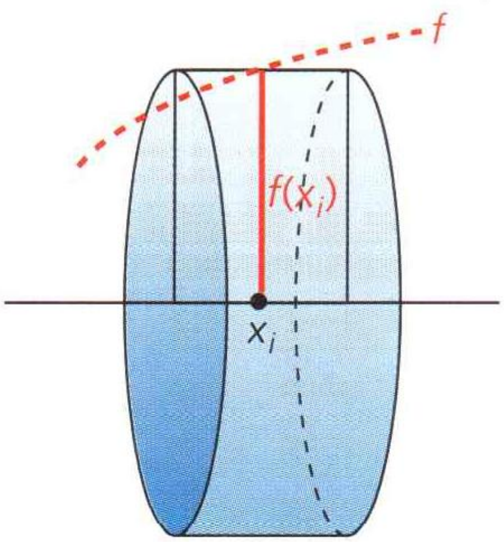


Inhoudsberekening mbv integralen

- Verdeel [a,b] in *n* gelijke deelintervallen met breedte $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$
- Kies in elk deelinterval een willekeurige x-waarde x_i.
- Op elk deelinterval bouw je een rechthoekje met breedte Δx en hoogte $f(x_i)$
- Wenteling rond de X-as:

  elk rechthoekje beschrijft een cilinder

  met hoogte Δx en met straal $f(x_i)$



- De inhoud van elk cilindertje is:

$$\Delta x . \pi . [f(x_i)]^2$$

- De inhoud van *n* cilindertjes V_n is:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . \pi . [f(x_i)]^2$$

- De inhoud van *n* cilindertjes V_n is:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . \pi . [f(x_i)]^2$$

- De gevraagde inhoud is dan: $V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . \pi . [f(x_i)]^2$

- f is continu in [a,b] ⇒ πf^2 ook continu in [a,b]:

$$V = \int_a^b \pi . [f(x_i)]^2 dx$$ (definitie bepaalde integraal)

$$\Rightarrow V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$ of $$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$